

تمرین ۳

حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x \quad (۲)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 14 \quad (۱)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{2}x + 7 \right) \quad (۴)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\Delta x - 1) \quad (۳)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\Delta x^4 - 4x^3 + 2x - 1) \quad (۶)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 4x + 1) \quad (۵)$$

۱) ۱۴

۲) $\lim_{n \rightarrow 0} 5n = 0$

۳) $\lim_{n \rightarrow 2} (5n - 1) = 5(2) - 1 = 9$

۴) $\lim_{n \rightarrow 1} \left(\frac{3}{2}n + 7 \right) = \frac{3}{2} + \frac{14}{2} = \frac{17}{2}$

۵) $\lim_{n \rightarrow 2} (2n^3 - 4n + 1) = \frac{2(2)^3}{14} - \frac{4(2)}{1} + 1 = 9$

۶) $\lim_{n \rightarrow 0} (5n^4 - 4n^3 + 2n - 1) = 5(0)^4 - 4(0)^3 + 2(0) - 1 = -1$

۷) اگر $f(x) = \begin{cases} 5x - 1 & , x \leq 1 \\ 2 - 3x & , x > 1 \end{cases}$ مطلوب است محاسبه

الف. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ب. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ پ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

الف. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ا) $\lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) \rightarrow 5n - 1 \rightarrow 5 - 1 = 4$

ب) $\lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) \rightarrow 2 - 3n \rightarrow 2 - 3 = -1$
 $f(1) = 4$

پ) $\lim_{n \rightarrow 1} f(n) \rightarrow$ در این جا با مقدار تابع برابر نیست پس حد ندارد

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} & , x \geq 2 \\ \sqrt{2x+1} \cdot x + 3 & , x < 2 \end{cases} \text{ اگر (۸)}$$

پ. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

الف. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

الف) $\lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) \rightarrow \sqrt{2n} + 1 \cdot n + 3 \rightarrow \sqrt{4} + 2 + 3 = 7$

ب) $\lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) \rightarrow \sqrt{n^2 - 3} \rightarrow \sqrt{2^2 - 3} = 1$

الف $f(2) = 1$

ج) $\lim_{n \rightarrow 2} f(n) \rightarrow \lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) = f(2) = 1$

الف (۹) اگر $f(x) = |x - 3|$ مطلوب است محاسبه

پ. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

ب. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

الف. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

الف) $\lim_{n \rightarrow 3^-} f(n) \rightarrow -n + 3 \rightarrow -3 + 3 = 0$

ب) $\lim_{n \rightarrow 3^+} f(n) \rightarrow n - 3 \rightarrow 3 - 3 = 0$
 $f(3) = 0$

ج) $\lim_{n \rightarrow 3} f(n) \rightarrow \lim_{n \rightarrow 3^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow 3^+} f(n) = f(3) = 0$

۲۴) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ موجود باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax + [x] & , x < 2 \\ 2 & , 2 \leq x < 3 \\ b + [x] & , x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) \rightarrow a + [n] \rightarrow a + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) \rightarrow 2$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 1 = 2 \rightarrow a = 1 + a = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow 3^-} f(n) \rightarrow 2$$

$$\lim_{n \rightarrow 3^+} f(n) \rightarrow b + [n] \rightarrow b + 3$$

$$\left. \begin{array}{l} b + 3 = 2 \rightarrow b = -1 \end{array} \right\}$$

۲۵) در تمرین‌های زیر، حدهای داده شده را محاسبه کنید.

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{n^2 - 1}{n - 1} \rightarrow \frac{(n+1)(n-1)}{(n-1)} \rightarrow 1+1=2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{n^2 - 16}{n + 8} \rightarrow \frac{(-1)^2 - 16}{-1 + 8} = \frac{-15}{7} = -\frac{15}{7} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 16}{x + 4} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow -1} \frac{n^2 + 1}{n + 1} \rightarrow \frac{(n+1)(n^2 - n + 1)}{(n+1)} \rightarrow (-1)^2 - (-1) + 1 = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} \quad (3)$$

$$\frac{(n-3)(n^2 + 3n + 9)}{n-3} \rightarrow 9 + 9 + 9 = 27 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad (4)$$

$$\frac{(\sqrt{n} - 3)(\sqrt{n} + 3)}{\sqrt{n} - 3} \rightarrow \sqrt{9} + 3 = 6 \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{5}{x-2} + \frac{3x}{x-1} \right) \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{\underbrace{x-2}_{0^-}} + \frac{6}{2-1} = -\infty + 6 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{x+1} \times \frac{2}{x-1} \right) \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{1+1} \times \frac{2}{\underbrace{1-1}_{0^+}} = \frac{3}{2} \times (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\underbrace{1-1}_{0^+}} + \frac{1}{1+1} = +\infty + \frac{1}{2} = +\infty$$

۲۶) در تمرین‌های زیر، پیوستگی تابع را در نقطه‌ی x_0 بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 \quad (1)$$

$$1 \in D_f \quad \checkmark$$

$$\lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) \rightarrow \varepsilon_{n-1} = \varepsilon_{-1} = 1 \text{ (1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) \rightarrow 1 \text{ (2)} \quad f(1) = \varepsilon_{n-1} = 1 \text{ (2)}$$

$$1 = 1 = 1$$

پیوسته است

$$\lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) \rightarrow n+1 \rightarrow 2+1=3$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 2 \\ 3x-2 & x > 2 \end{cases}, x_0 = 2 \text{ (2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) \rightarrow \varepsilon_{n-2} \rightarrow \varepsilon(2) - \varepsilon = 3$$

$f(2) =$ جزو دامنه نیست
 $2 \notin D_f$

پس پیوسته نیست

$$\lim_{n \rightarrow 2^-} f(n) \rightarrow \varepsilon_{n-2} \rightarrow \varepsilon_{-2} = -\infty$$

$$f(x) = \begin{cases} 4-2x & x < 2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}, x_0 = 2 \text{ (2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow 2^+} f(n) \rightarrow n+2 \rightarrow 2+2=4$$

$2 \in D_f \checkmark$

$\infty \neq -\infty$ پیوسته نیست

$$\lim_{n \rightarrow -1^-} f(n) \rightarrow \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} = n-1$$

$$-1-1 = -2$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, x_0 = -1 \text{ (2)}$$

$-1 \notin D_f$

$$\lim_{n \rightarrow -1^+} f(n) \rightarrow -2$$

پیوسته نیست

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 1 \\ ax^2, & x > 1 \end{cases} \quad (\Psi) \quad f(x) = \begin{cases} x^2-2, & x \leq 1 \\ x+a, & x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 1 \\ e^{ax}, & x > 1 \end{cases} \quad (\Psi)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) &\rightarrow n+a \rightarrow 1+a \\ \lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) &\rightarrow n^2-1 \rightarrow 1-1 = -1 \\ f(1) &= 1-1 = -1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow 1^+} f(n)} \right\} 1+a = -1 \rightarrow a = -2$$

$$\begin{aligned} \leftarrow \lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) &\rightarrow n+c = f \\ \lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) &\rightarrow an^2 \rightarrow a \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow 1^-} f(n)} \right\} a = f$$

$$\begin{aligned} \leftarrow \lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) &\rightarrow 1e^1 = e \\ \lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) &\rightarrow e^{an} \rightarrow e^{a} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow 1^-} f(n)} \right\} ea = 1 \rightarrow a = \frac{1}{e}$$

۲۹) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)$ در نقاط $x = -2$ و $x = 1$ پیوسته باشد.

$$-2 \rightarrow m+2a \rightarrow 2a-2$$

$$-2 \rightarrow 2am+b \rightarrow -4a+b$$

$$1 \rightarrow -4a+b$$

$$2a-2 = -4a+b \rightarrow \wedge a-b=2 \quad \textcircled{I}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2a & , x < -2 \\ 2ax+b & , -2 \leq x \leq 1 \\ 2x-2b & , x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i \rightarrow 2am+b \rightarrow 2a+b \\ ii \rightarrow 2m-2b \rightarrow 2-2b \end{cases} \begin{cases} 2-2b = 2a+b \rightarrow \\ 2a+b=2 \rightarrow \\ a+b=1 \quad \textcircled{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \wedge a-b=2 \\ a+b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1/3 \\ b=2/3 \end{cases}$$

۳۰) به ازای چه مقادیری از a و b ، تابع $f(x)$ در $x = 4$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} a(x-3)+b & , x < 4 \\ \left(\frac{x}{4}\right)+b & , x = 4 \\ x+4 & , x > 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \rightarrow a\left(\frac{4}{4}-3\right)+b = a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow m \in \mathbb{R} = \mathbb{R} + \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$f(4) = \frac{4}{4} + b = 1+b$$

$$1+b = \mathbb{R} \rightarrow b = \mathbb{V}]$$

$$a+b = \mathbb{R} \rightarrow a+\mathbb{V} = \mathbb{R} \rightarrow a = \mathbb{I}]$$